Aula 16: Projeto de controladores pelo lugar das raízes

prof. Dr. Eduardo Bento Pereira

Universidade Federal de São João del-Rei

ebento@ufsj.edu.br

Lugar das raízes - Revisão

O método do lugar geométrico das raízes

Considere a função complexa representada por

$$F(s) = P(s) + kQ(s) \tag{1}$$

em que:

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \tag{2}$$

e

$$Q(s) = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0 \tag{3}$$

a_i, b_i, K, n e m são números reais e $-\infty \leq k \leq \infty$

Lugar das raízes - Revisão

O método do lugar geométrico das raízes

Considere o sistema, representado no diagrama abaixo, cuja função de transferência em malha fechada é dada por

$$\frac{Y(s}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}. \tag{4}$$

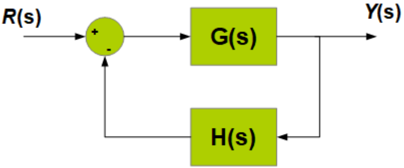

Figure: Diagrama de exemplo de um sistema em malha fechada.

Lugar das raízes - Revisão

O método do lugar geométrico das raízes

Com os pólos de malha fechada sendo as raízes da equação característica

$$1 + G(s)H(s) = 0. \tag{5}$$

Determina-se lugar das raízes as curvas formadas pelo conjuntos de pontos traçados no plano complexo s a partir do cálculo dos possíveis lugares onde podem estar os pólos de malha fechada, ou seja, as raízes da equação característica. Estes possíveis lugares são obtidos por meio da variação de algum parâmetro, geralmente o ganho.

Lugar das raízes - Revisão

O método do lugar geométrico das raízes

Com os pólos de malha fechada sendo as raízes da equação característica

$$1 + G(s)H(s) = 0. \tag{5}$$

Determina-se lugar das raízes as curvas formadas pelo conjuntos de pontos traçados no plano complexo s a partir do cálculo dos possíveis lugares onde podem estar os pólos de malha fechada, ou seja, as raízes da equação característica. Estes possíveis lugares são obtidos por meio da variação de algum parâmetro, geralmente o ganho.

Lugar das raízes - Revisão

Equação característica na forma complexa

A equação característica pode ser escrita na forma complexa como

$$G(s)H(s) = -1 + j0. \tag{6}$$

Lembrando que $G(s)H(s)$ é a função de transferência de malha aberta.

A partir desta equação, pode-se definir os conceitos:

Condição de módulo:

$$|G(s)H(s)| = 1 \tag{7}$$

e

Condição de ângulo:

$$\angle G(s)H(s) = 180^o \pm n360^o \tag{8}$$

Desenhando o lugar das raízes - Revisão

PASSO 1: Número de ramos

Primeiramente, marque no plano s os pontos referentes aos pólos e zeros utilizando os símbolos o e $\times$, respectivamente. O número de ramos (n) será igual ao número de pólos.

Desenhando o lugar das raízes - Revisão

PASSO 1: Número de ramos

Primeiramente, marque no plano s os pontos referentes aos pólos e zeros utilizando os símbolos o e $\times$, respectivamente. O número de ramos (n) será igual ao número de pólos.

Obs.: Simetria

O lugar das raízes é simétrico devido ao fato de que as raízes da equação característica podem ser, apenas, reais ou complexas conjugadas.

Desenhando o lugar das raízes - Revisão

PASSO 2: Lugar das raízes sobre o eixo real

Considerações:

- Pares de pólos ou zeros complexos conjugados não afetam a condição de fase sobre o eixo real;

Desenhando o lugar das raízes - Revisão

PASSO 2: Lugar das raízes sobre o eixo real

Considerações:

- Pares de pólos ou zeros complexos conjugados não afetam a condição de fase sobre o eixo real;
- cada pólo ou zero (real) de malha aberta contribui com uma fase de 180^o, estando este a direita de um ponto de teste s;

Desenhando o lugar das raízes - Revisão

PASSO 2: Lugar das raízes sobre o eixo real

Considerações:

- Pares de pólos ou zeros complexos conjugados não afetam a condição de fase sobre o eixo real;
- cada pólo ou zero (real) de malha aberta contribui com uma fase de 180^o, estando este a direita de um ponto de teste s;
- cada pólo ou zero (real) de malha aberta contribui com uma fase de 0^o, estando este a esquerda de um ponto de teste s;

Desenhando o lugar das raízes - Revisão

PASSO 2: Lugar das raízes sobre o eixo real

Considerações:

- Pares de pólos ou zeros complexos conjugados não afetam a condição de fase sobre o eixo real;
- cada pólo ou zero (real) de malha aberta contribui com uma fase de 180^o, estando este a direita de um ponto de teste s;
- cada pólo ou zero (real) de malha aberta contribui com uma fase de 0^o, estando este a esquerda de um ponto de teste s;

Conclusão: um ponto de teste s pertence ao lugar das raízes se o número de pólos e zeros a sua direita for ímpar.

Desenhando o lugar das raízes - Revisão

PASSO 3: Pontos de início e de término

O lugar das raízes é formado por todos os pólos de malha fechada obtidos para $0 < K < \infty$.

Pontos de início

O ramos se iniciam nos pólos de malha aberta, condição na qual $K = 0$ (Equação característica).

Pontos de término

O ramos terminam nos zeros de malha aberta, condição na qual $K \to \infty$ (Condição de módulo).

Desenhando o lugar das raízes - Revisão

PASSO 5: Assíntotas

O número de assíntotas é igual a $n - m$, sendo n o número de pólos, m o número de zeros e $n > m$.

$$m\alpha - n\alpha = 180^o \pm r360^o \tag{9}$$

Com $r = 0, 1, 2, ...$

$$\alpha_{n-m} = (2n - 2m - 1)\frac{180^o}{n - m} \tag{10}$$

Desenhando o lugar das raízes - Revisão

PASSO 5: Assíntotas

O número de assíntotas é igual a $n-m$, sendo n o número de pólos, m o número de zeros e $n>m$.

$$m\alpha - n\alpha = 180^o \pm r360^o \tag{9}$$

Com $r = 0, 1, 2, ...$

$$\alpha_{n-m} = (2n-2m-1)\frac{180^o}{n-m} \tag{10}$$

As assíntotas cruzam o eixo real no ponto

$$S_c = \frac{(\text{soma dos pólos de malha aberta}) - (\text{soma dos zeros de malha aberta})}{n-m} \tag{11}$$

Pontos de término

Desenhando o lugar das raízes - Revisão

PASSO 6: Pontos de partida e chegada sobre o exio real

Se existirem dois pólos de malha aberta sobre o eixo real e o lugar das raízes fizer parte do trecho entre estes dois pólos, então haverá pelo menos um ponto de partida entre eles

Considerando a equação característica e que pode-se escrever

$$G(s)H(s) = \frac{KN(s)}{D(s)} \tag{12}$$

Os pontos de partida ou chegada podem ser calculados por

$$\frac{d(k)}{ds} = -\left[\frac{D'(s)N(s) - D(s)N'(s)}{N(s)^2}\right] = 0 \tag{13}$$

Desenhando o lugar das raízes - Revisão

PASSO 7: Ângulo de partida de um pólo complexo e chegada de um zero complexo

Escolhendo um ponto de teste nas proximidades de um pólo ou zero complexo e, utilizando-se a condição de fase, pode-se determinar o ângulo desejado pela contribuição dos demais pólos e zeros para um dado pólo p_1:

$$\angle p_1 = \angle(s - z_1) + \cdots + \angle(s - z_m) - \angle(s - p_2) - \cdots - \angle(s - p_n) \quad (14)$$

Da mesma forma calcula-se o ângulo de chegada para um zero z_1

$$\angle z_1 = -\angle(s - z_2) - \cdots - \angle(s - z_m) + \angle(s - p_1) + \cdots + \angle(s - p_n) \quad (15)$$

Desenhando o lugar das raízes - Revisão

Efeito da adição de pólos

Desloca o lugar das raízes para a direita diminuindo a estabilidade relativa.

Exemplo Matlab:

Desenhando o lugar das raízes - Revisão

Efeito da adição de pólos

Desloca o lugar das raízes para a direita diminuindo a estabilidade relativa.

Exemplo Matlab:

Efeito da adição de zeros

Desloca o lugar das raízes para a esquerda aumentando a estabilidade relativa e diminuindo o tempo de acomodação.

Exemplo Matlab:

Fim