Aula 19: Projeto de controladores no domínio da frequência

prof. Dr. Eduardo Bento Pereira

Universidade Federal de São João del-Rei

ebento@ufsj.edu.br

Margens de estabilidade

Margem de ganho

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega)H(j\omega)|} \qquad (1)$$

na frequência ω em que $\underline{/G(j\omega)H(j\omega)} = -180^o$

Margens de estabilidade

Margem de ganho

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega)H(j\omega)|} \tag{1}$$

na frequência ω em que $\underline{/G(j\omega)H(j\omega)} = -180^o$

$$MG(\text{dB}) = 20\log\frac{1}{|G(j\omega)H(j\omega)|} = -20\log|G(j\omega)H(j\omega)| \tag{2}$$

Se $|G(j\omega)H(j\omega)| < 1$ então $MG > 0$ e $|G(j\omega)H(j\omega)| > 1$ então $MG < 0$

Margens de estabilidade

Margem de fase

$$MF = 180^o + \angle G(j\omega)H(j\omega) \tag{3}$$

na frequência ω em que $|G(j\omega)H(j\omega)| = 1$

Margens de estabilidade

Estabilidade

- Um sistema é estável em malha fechada se sua margem de ganho e fase forem positivas;
- Sistemas de primeira e segunda ordem possuem margem de ganho infinita pois a fase nunca atinge -180^o (Para casa!);
- Para sistemas instáveis em malha aberta, deve-se usar o diagrama de Nyquist para análise de estabilidade.

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por avanço de fase

$$G_c(s) = K\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} \tag{4}$$

em que $0 < \alpha < 1$

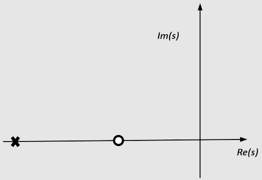

Figure: Diagrama de Bode do compensador em avanço.

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por avanço de fase

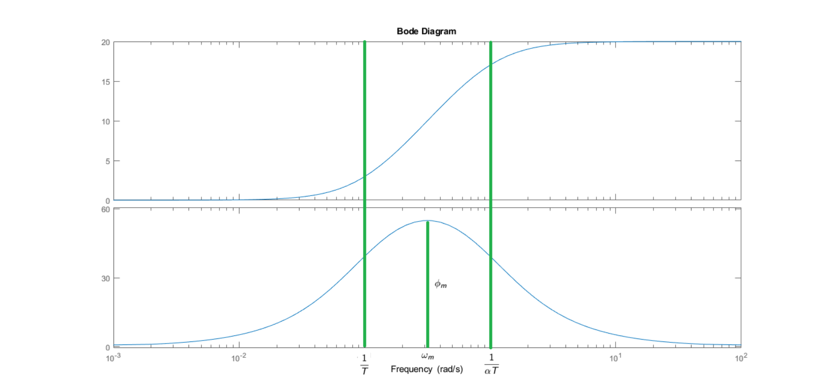

Figure: Diagrama de Bode do compensador em avanço.

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por avanço de fase

$$\phi = \arctan(\omega T) - \arctan(\alpha\omega T) \tag{5}$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por avanço de fase

$$\phi = \arctan(\omega T) - \arctan(\alpha\omega T) \tag{5}$$

$$\left.\frac{d\phi}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_m} = \frac{T}{1+\omega_m^2 T^2} - \frac{\alpha T}{1+\alpha^2\omega_m^2 T^2} = 0$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por avanço de fase

$$\phi = \arctan(\omega T) - \arctan(\alpha \omega T) \tag{5}$$

$$\left.\frac{d\phi}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_m} = \frac{T}{1+\omega_m^2 T^2} - \frac{\alpha T}{1+\alpha^2\omega_m^2 T^2} = 0 \Rightarrow \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T} \tag{6}$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por avanço de fase

Na frequência ω_m, tem-se que

$$G_c(j\omega_m) = K\frac{Tj\omega_m + 1}{\alpha j\omega_m + 1} = K\frac{\frac{j}{\sqrt{\alpha}} + 1}{\frac{j\alpha}{\sqrt{\alpha}} + 1} \tag{7}$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por avanço de fase

Na frequência ω_m, tem-se que

$$G_c(j\omega_m) = K\frac{Tj\omega_m + 1}{\alpha j\omega_m + 1} = K\frac{\frac{j}{\sqrt{\alpha}} + 1}{\frac{j\alpha}{\sqrt{\alpha}} + 1} \qquad (7)$$

A partir da equação (7), pode -se calcular o módulo de $G_c(j\omega_m)$ como

$$|G_c(j\omega_m)| = \frac{K}{\sqrt{\alpha}}, \qquad (8)$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por avanço de fase

Na frequência ω_m, tem-se que

$$G_c(j\omega_m) = K\frac{Tj\omega_m + 1}{\alpha j\omega_m + 1} = K\frac{\frac{j}{\sqrt{\alpha}} + 1}{\frac{j\alpha}{\sqrt{\alpha}} + 1}$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por avanço de fase

Na frequência ω_m, tem-se que

$$G_c(j\omega_m) = K\frac{Tj\omega_m + 1}{\alpha j\omega_m + 1} = K\frac{\frac{j}{\sqrt{\alpha}} + 1}{\frac{j\alpha}{\sqrt{\alpha}} + 1}$$

e a fase de $G_c(j\omega_m)$ como

$$\underline{/G_c(j\omega_m)} = \arctan\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \arctan\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}. \tag{9}$$

ou,

$$\tan(\phi_m) = \frac{\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}} = \frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \sin\omega_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \tag{10}$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo 1: compensação por avanço de fase

Considere a função de transferência:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{5}{s(s+1)} \tag{11}$$

em que $\Theta(s)$ e $E_a(s)$ são a posição angular e a tensão de armadura, respectivamente.

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo 1: compensação por avanço de fase

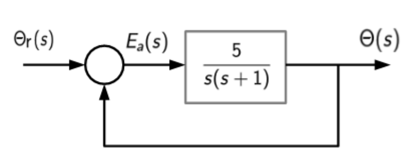

Figure: Exemplo 1: Gráfico de Bode sem o compensador.

Cuja margem de fase é de aproximadamente $25,2^o$, medida na frequência $\omega \cong 2,1$ (rad/s) na qual o ganho é 0 dB. A margem de ganho é infinita pois a curva de fase nunca atinge 180^o.

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo: compensação por avanço de fase

As especificações de desempenho a serem atendidas são $e(\infty) = 0,02$ e $MF \cong 50^o$. Para tal será projetado o compensador em avanço o que resultará em um sistema de controle representado no diagrama abaixo:
O erro de estado estacionário $e(\infty)$ para uma entrada a rampa $\Theta_r(t) = t$ é calculado como

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} sE_a(s) = \lim_{s \to 0} s\left(\frac{1}{1+G(s)}\right)\frac{1}{s^2} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s + \frac{5}{s+1}} = 0,2. \quad (12)$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo: compensação por avanço de fase

O diagrama em blocos para o sistema é

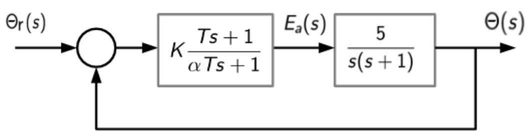

Figure: Exemplo 1: diagrama de blocos em malha fechada.

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo: compensação por avanço de fase

A função de transferência de malha fechada é

$$G_{MA}(s) = G_c(s)G(s) = K\frac{(Ts+1)}{(\alpha T+1)}\frac{5}{s(s+1)} \tag{13}$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo: compensação por avanço de fase

A função de transferência de malha fechada é

$$G_{MA}(s) = G_c(s)G(s) = K\frac{(Ts+1)}{(\alpha T+1)}\frac{5}{s(s+1)} \tag{13}$$

O ganho K pode ser obtido a partir do valor do erro estacionário desejado

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{1+G_{MA}(s)}\right)\frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s+\frac{K(Ts+1)5}{(\alpha Ts+1)(s+1)}} = \frac{1}{5K} = 0,02. \end{aligned} \tag{14}$$

Portanto, $K = 10$, ou, em decibéis $K = 20\log 10 = 20$ dB.

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo: compensação por avanço de fase

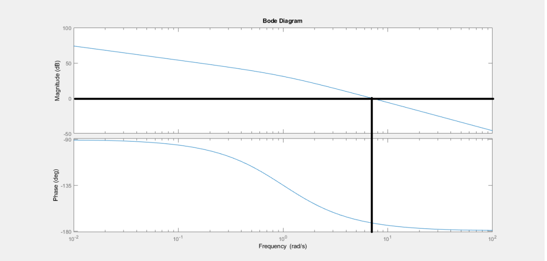

Figure: Diagrama de Bode de $KG(j\omega)$.

Cruzamento por 0 dB passar para uma frequência mais alta ($\omega \cong 7$ (rad/s)) e a margem de fase é reduzida para 8^o.

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo: compensação por avanço de fase

$$\sin\left(\phi_m\right) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 0,707 \Rightarrow \alpha = 0,172 \tag{15}$$

e

$$|G(j\omega_m)| = \frac{K}{\sqrt{\alpha}} \cong \frac{10}{\sqrt{0,172}} \cong 24,1 \tag{16}$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo: compensação por avanço de fase

O ganho de malha aberta na frequência ω_m deve ser 1 (0 dB), ou seja:

$$|G_{MA}(j\omega_m)| = |G_c(j\omega_m)G(j\omega_m)| = 1 \Rightarrow |G(j\omega_m)| = \frac{1}{|G_c(j\omega_m)|} \qquad (17)$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo: compensação por avanço de fase

O ganho de malha aberta na frequência ω_m deve ser 1 (0 dB), ou seja:

$$|G_{MA}(j\omega_m)| = |G_c(j\omega_m)G(j\omega_m)| = 1 \Rightarrow |G(j\omega_m)| = \frac{1}{|G_c(j\omega_m)|} \tag{17}$$

$$\left|\frac{5}{j\omega_m(j\omega_m) + 1))}\right| = \frac{1}{24,1} \Rightarrow \omega_m \cong 10,9(\mathrm{rad/s}) \tag{18}$$

e

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}} \Rightarrow T \cong 0,221 \tag{19}$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo: compensação por avanço de fase

A função de transferência resultante para o compensador é

$$G_c(s) = \frac{10(0,221s+1)}{0,038s+1} \tag{20}$$

Fim