# Aula 15: Projeto de controladores pelo lugar das raízes

prof. Dr. Eduardo Bento Pereira

Universidade Federal de São João del-Rei

*ebento@ufsj.edu.br*

# Compensação por atraso de fase

## Compensador por atraso de fase (*phase lag*).

Considere a função de transferência para um compensador por avanço de fase:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + z_c}{s + p_c} \tag{1}$$

em que $z_c > p_c$.

## Propriedades:

A compensação por atraso de fase tem a propriedade de melhorar a resposta em regime do sistema e, se bem projetado, sem alterar significativamente a resposta transitória.

# Compensação por atraso de fase

**Efeitos do atraso de fase:**

- Para qualquer ponto $s$ com $Re < 0$ e $Im > 0$, o compensador $G(s)$ retira fase na malha aberta devido a $\angle G(s) = \phi - \theta < 0$

Figure: Compensação em atraso de fase.

# Compensação por atraso de fase

## Projeto do compensador

1. Determinar o erro em regime estacionário para o sistema com compensador dada uma entrada ao degrau;

# Compensação por atraso de fase

## Projeto do compensador

1. Determinar o erro em regime estacionário para o sistema com compensador dada uma entrada ao degrau;
2. Considere o ganho $K_c = 1$;

# Compensação por atraso de fase

## Projeto do compensador

1. Determinar o erro em regime estacionário para o sistema com compensador dada uma entrada ao degrau;
2. Considere o ganho $K_c = 1$;
3. Escolher arbitrareamente o valor do pólo perto da origem;

# Compensação por atraso de fase

## Projeto do compensador

1. Determinar o erro em regime estacionário para o sistema com compensador dada uma entrada ao degrau;
2. Considere o ganho $K_c = 1$;
3. Escolher arbitrareamente o valor do pólo perto da origem;
4. Em seguida, calcular o ganho $K_c$ por meio da condição de módulo ($|G(s)H(s)| = 1$);

# Compensação por atraso de fase

## Exemplo 1:

Considere a função de transferência em malha aberta:

$$G(s) = \frac{40}{(s+1)^2(s+10)} \tag{2}$$

Cuja função de transferência em malha fechada sem o compensador é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{40}{s^3 + 12s^2 + 21s + 50} = \frac{40}{(s+10,448)(s^2+1,552s+4,786)} \tag{3}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{40}{(s+10,448)(s+0,776+j2,045)(s+0,776-j2,045)} \tag{4}$$

Para este sistema tem-se $\omega_n = 2,188(\text{rad}/s)$ e $\zeta \cong 0,355$.

# Compensação por atraso de fasee

## Exemplo 1:

Deseja-se projetar um compensador $C(s)$ de modo que o erro em regime estacionário reduza em 10%.

# Compensação por atraso de fasee

## Exemplo 1:

Deseja-se projetar um compensador $C(s)$ de modo que o erro em regime estacionário reduza em 10%.

$$e_s(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{1+G(s)}\right)\frac{1}{s} \tag{5}$$

$$e_s(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{40}{(s+1)^2(s+10)}} = \frac{1}{1+4} = 0,2. \tag{6}$$

# Compensação por atraso de fasee

## Exemplo 1:

Deseja-se projetar um compensador $C(s)$ de modo que o erro em regime estacionário reduza em 10%.

$$e_s(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{1+G(s)}\right)\frac{1}{s} \tag{5}$$

$$e_s(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{40}{(s+1)^2(s+10)}} = \frac{1}{1+4} = 0,2. \tag{6}$$

## Projetando o compensador:

Calcule do erro em regime permanente:

$$e_s(\infty) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{1+G_D(s)}\right)\frac{1}{s} = \lim_{\to 0} \frac{1}{1+\frac{40K_c(s+z_c)}{(s+p_c)(s+1)^2(s+10)}} \tag{7}$$

# Compensação por atraso de fasee

## Exemplo 1:

Deseja-se projetar um compensador $C(s)$ de modo que o erro em regime estacionário reduza em 10%.

Calcule do erro em regime permanente:

$$e_s(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{1+G(s)}\right)\frac{1}{s} \tag{8}$$

$$e_s(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{40}{(s+1)^2(s+10)}} = \frac{1}{1+4} = 0,2. \tag{9}$$

## Projetando o compensador:

Calcule do erro em regime permanente:

$$e_s(\infty) = \frac{1}{1+\frac{40K_c z_c}{10p_c}}$$

# Compensação por atraso de fasee

## Exemplo 1:

Deseja-se projetar um compensador $C(s)$ de modo que o erro em regime estacionário reduza em 10%.
Calcule do erro em regime permanente:

$$e_s(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{1+G(s)}\right)\frac{1}{s} \tag{8}$$

$$e_s(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{40}{(s+1)^2(s+10)}} = \frac{1}{1+4} = 0,2. \tag{9}$$

## Projetando o compensador:

Calcule do erro em regime permanente:

$$e_s(\infty) = \frac{1}{1+\frac{40K_c z_c}{10p_c}} = 0,02. \tag{10}$$

# Compensação por atraso de fase

Exemplo 1:

$$\frac{40K_c z_c}{10p_c} = 0,02 \tag{11}$$

O pólo e o zero devem ser projetados de modo a não afetarem a resposta transitória. Para isso, os mesmos devem ser alocados próximos um ao outro no lugar das raízes. Para isso, primeiramente faça o ganho $K_c = 1$ e escolha arbitrariamente o valor de $p_c$ próximo a origem:

# Compensação por atraso de fase

Exemplo 1:

$$\frac{40K_c z_c}{10p_c} = 0,02 \tag{11}$$

O pólo e o zero devem ser projetados de modo a não afetarem a resposta transitória. Para isso, os mesmos devem ser alocados próximos um ao outro no lugar das raízes. Para isso, primeiramente faça o ganho $K_c = 1$ e escolha arbitrariamente o valor de $p_c$ próximo a origem:

$$\frac{z_c}{p_c} = \frac{0,98}{0,08} \cong 12,25 \tag{12}$$

e, para $p_c = 0,01$,

$$z_c \cong 0.1225 \tag{13}$$

# Compensação por atraso de fase

Exemplo 1:

$$\left|\frac{40(s+01225)}{(s+0,01)(s+1)^2(s+10)}\right|_{s=-0{,}74+j1{,}96} = 1 \tag{14}$$

$$K_c \cong 0,9415 \tag{15}$$

# Compensação por atraso de fase

## Exemplo 1:

$$\left|\frac{40(s+01225)}{(s+0,01)(s+1)^2(s+10)}\right|_{s=-0{,}74+j1{,}96} = 1 \tag{14}$$

$$K_c \cong 0,9415 \tag{15}$$

$$C(s) = \frac{0,9415(s+01225)}{(s+0,01)} \tag{16}$$

e a função de transferência em malha fechada é:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+\frac{400{,}9415(s+0{,}1225)}{(s+0{,}01)(s+1)^2(s+10)}} = \frac{37,66(s+0,1225)}{s^4+12,01s^3+21,12s^2+47,87s+4,71} \tag{17}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{37,66(s+0,1225)}{(s+0,103)(s+10,42)(s+0,74+j1,96)(s+0,74-j1,96)}$$

# Compensação por atraso de fase

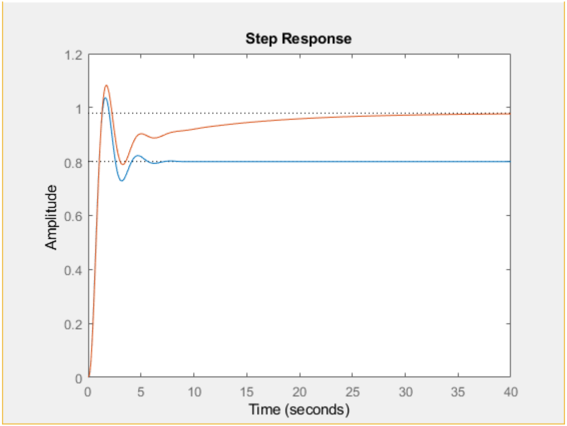



Figure: Exemplo 1: Resposta ao degrau com e sem compensador.

# Compensação por avanço e atraso de fase

## Compensador por avanço e atraso de fase (*lead-lag phase*).

Esta compensação é usada quando se necessita melhora a resposta transitória e em regime simultaneamente.

## Exemplo 2:

Considere a função de transferência para o sistema:

$$G_c(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+10)} \tag{19}$$

Projete um compensador de modo que o coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,5$ e frequência natural $\omega_n = 2$ (rad/s) e erro no estado estacionário de 0,02. Estas especificações determinam os pólos de malha fechada em $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d = -1 \pm j\sqrt{3}$

# Compensação por avanço e atraso de fase

**Compensador por avanço e atraso de fase (*lead-lag phase*).**

Esta compensação é usada quando se necessita melhora a resposta transitória e em regime simultaneamente.

**Exemplo 2:**

Considere a função de transferência para o sistema:

$$G_c(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+10)} \tag{20}$$

Projete um compensador de modo que o coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,5$ e frequência natural $\omega_n = 2$ (rad/s) e erro no estado estacionário de 0,02.

# Compensação por avanço e atraso de fase

**Parte do Compensador por avanço**

$$G_c(s) = K_c \frac{s + z_c}{(s + p_c)} \tag{21}$$

# Compensação por avanço e atraso de fase

## Parte do Compensador por avanço

$$G_c(s) = K_c \frac{s + z_c}{(s + p_c)} \tag{21}$$

Escolhendo o valor do zero do compensador de modo a cancelar um pólo do sistema:

$$C_1(s) = K_c \frac{s + z_c}{(s + p_c)(s + 1)^2(s + 10)} = K_c \frac{1}{(s + p_c)(s + 1)(s + 10)} \tag{22}$$

# Compensação por avanço e atraso de fase

## Parte do Compensador por avanço

Utilizar a condição de fase para calcular o valor de $p_c$.

$$\angle G_D = \pm\text{múltiplo ímpar de } 180^o \tag{23}$$

# Compensação por avanço e atraso de fase

## Parte do Compensador por avanço

Utilizar a condição de fase para calcular o valor de $p_c$.

$$\angle G_D = \pm \text{múltiplo ímpar de } 180^o \tag{23}$$

$$-\angle(s+p_c) - \angle(s+1) - \angle(s+10) = 180 \tag{24}$$

Para $s = -1 + j\sqrt{3}$, tem-se:
$-\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{p_c - 1}\right) = 90^o + 10,893^o + 180^o = 208,89^o$.
Que resulta em $p_c \cong 1,3333$

# Compensação por avanço e atraso de fase

## Parte do Compensador por avanço

Obtendo-se $K_c$ pela condição de módulo:

$$\left| \frac{K_c}{(s+1,3333)(s+1)(s+10)} \right|_{s=-1+j\sqrt{3}=1} \tag{25}$$

sendo $K_c = 28$ e

$$C_1(s) = \frac{28(s+1)}{(s+1,3333)} \tag{26}$$

# Compensação por avanço e atraso de fase

## Resposta em malha fechada apenas com o compensador em avanço

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{28}{(s+1,3333)(s+1)(s+10)+28} \tag{27}$$

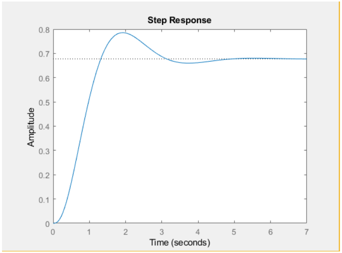



Figure: Exemplo 1: Resposta ao degrau com o compensador em avanço.

# Compensação por avanço e atraso de fase

**Resposta em malha fechada apenas com o compensador em avanço e atraso**

O sobressinal conseguido é de $16,2\%$ e o tempo de acomodação é de 3 segundos. Porém, o erro em regime é de $0,32$. Portanto, será necessário incluir o compensador em atraso de modo a reduzir este erro para $0,02$.

# Compensação por avanço e atraso de fase

## Resposta em malha fechada apenas com o compensador em avanço e atraso

O sobressinal conseguido é de $16,2\%$ e o tempo de acomodação é de 3 segundos. Porém, o erro em regime é de $0,32$. Portanto, será necessário incluir o compensador em atraso de modo a reduzir este erro para $0,02$. Considere

$$C_2(s) = K_at\frac{s + z_at}{(s + p_at)} \tag{28}$$

Obtendo-se:

$$G_D(s) = 28\frac{s + 1}{s + 1,3333}\frac{K_{at}(s + z_{at})}{(s + p_{at})}\frac{1}{(s + 1)^2(s + 10)} \tag{29}$$

# Compensação por avanço e atraso de fase

## Resposta em malha fechada apenas com o compensador em avanço e atraso

O erro estacionário será dado por:

$$\frac{1}{1+\frac{2{,}1K_{at}z_{at}}{p_{at}}}=0,02. \tag{30}$$

Que resulta em $z_{at}=0,2333$ para $K_{at}=1$ e $p_{at}=0,01$.

# Compensação por avanço e atraso de fase

**Resposta em malha fechada apenas com o compensador em avanço e atraso**

O erro estacionário será dado por:

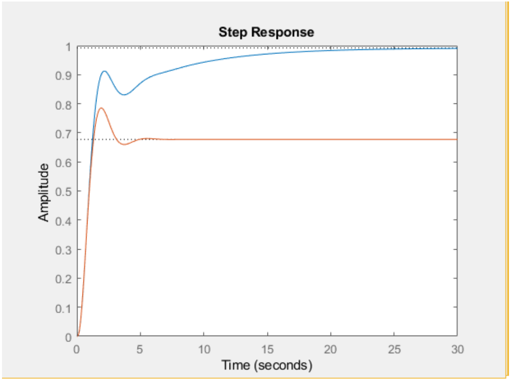
$$\frac{1}{1+\frac{2{,}1K_{at}z_{at}}{p_{at}}} = 0,02. \tag{30}$$

Que resulta em $z_{at} = 0,2333$ para $K_{at} = 1$ e $p_{at} = 0,01$. O ganho $K_{at}$ pode ser obtido pela condição de módulo para o pólo de malha fechada em $s = -0,93 + j1,61$ sendo $K_{at} \cong= 0,93$.

# Compensação por avanço e atraso de fase

## Resposta em malha fechada apenas com o compensador em avanço

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{26,04(s+0,2333)}{s^4+12,34s^3+24,79s^2+39,62^s+6,21} \tag{31}$$



# Fim