Aula 20: Projeto de controladores no domínio da frequência

prof. Dr. Eduardo Bento Pereira

Universidade Federal de São João del-Rei

ebento@ufsj.edu.br

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por atraso de fase

$$G_c(s) = K\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} \tag{1}$$

em que $\alpha > 1$

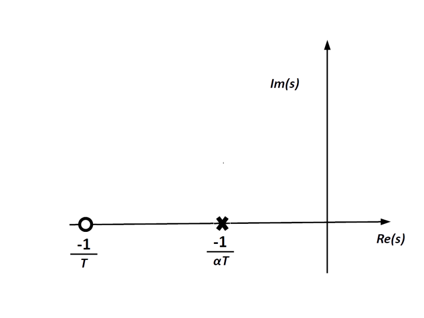

Figure: Diagrama de pólos e zeros de um compensador em atraso de fase.

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por atraso de fase

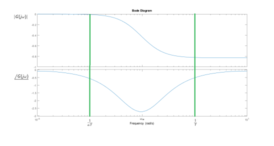

Figure: Diagrama de Bode de um compensador em atraso de fase.

- Reduzir o ganho em altas frequências melhorando a margem de fase e resposta transitória, ou;

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por atraso de fase

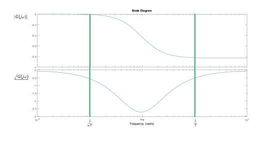

Figure: Diagrama de Bode de um compensador em atraso de fase.

- Reduzir o ganho em altas frequências melhorando a margem de fase e resposta transitória, ou;
- manter margem de fase e aumentar ganho em baixa frequência reduzindo o erro estacionário;

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por atraso de fase

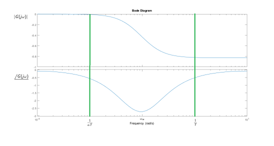

Figure: Diagrama de Bode de um compensador em atraso de fase.

- Reduzir o ganho em altas frequências melhorando a margem de fase e resposta transitória, ou;
- manter margem de fase e aumentar ganho em baixa frequência reduzindo o erro estacionário;
- O compensador introduz margem negativa (instabilidade) na região que seu ganho decresce. Observar a região crítica na qual o ganho é 1.

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por atraso de fase

Considere o sistema representado pela função de transferência de malha aberta

$$G(s) = \frac{40}{(s+1)^2(s+10)} \tag{2}$$

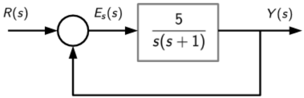

Figure: Diagrama em bloco do sistema sem o compensador.

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por atraso de fase

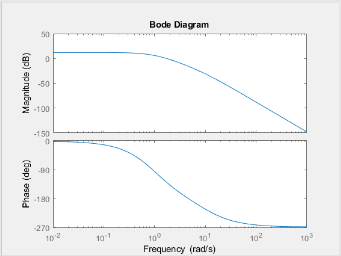

Figure: Diagrama de Bode do sistema sem o compensador.

A margem de fase é de 51^o e a margem de ganho é de 16 dB. Este sistema em malha fechada é estável.

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por atraso de fase

O erro estacionário para uma entrada ao degrau é dada por

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} sE_s(s) = \lim_{s \to 0} s\left(\frac{1}{1+G(s)}\right)$$

$$= \lim_{s \to 0} s\left(\frac{1}{1+\frac{40}{(s+1)^2(s+10)}}\right) = \frac{1}{1+4} = 0,2 \tag{3}$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por atraso de fase

Projeto: O projeto do compensador deve reduzir o erro estacionário em 10 vezes, mantendo o valor da margem de fase.

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por atraso de fase

Projeto: O projeto do compensador deve reduzir o erro estacionário em 10 vezes, mantendo o valor da margem de fase. A função de transferência em malha fechada é:

$$G_{MA}(s) = G_c(s)G(s) = \frac{K(Ts+1)}{\alpha Ts+1}\frac{40}{(s+1)^2(s+10)} \tag{4}$$

O erro estacionário se torna

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{1+G_{MA}(s)}\right)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{1+\frac{K(Ts+1)40}{(\alpha Ts+1)(s+1)^2(s+10)}}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+4K} = 0,02 \tag{5}$$

Resultando em $K = 12,25$.

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por atraso de fase

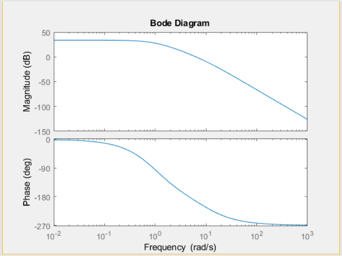

Figure: Diagrama de Bode da função $KG(j\omega)$.

$$20\log\left|\frac{Tj\omega+1}{\alpha Tj\omega+1}\right| = -23(\text{dB}) \Rightarrow \left|\frac{Tj\omega+1}{\alpha Tj\omega+1}\right| = 0,0708 \quad (6)$$

Obs.: Encontra-se a frequência na qual $MF = 55^o$ ou seja, $-180^o + 55^o = -125^o$ na qual o módulo vale 23 dB.

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por atraso de fase

Para altas frequências:

$$\lim_{s\to\infty} = \left|\frac{Tj\omega+1}{\alpha Tj\omega+1}\right| = \left|\frac{Tj+\frac{1}{\omega}}{\alpha Tj+\frac{1}{\omega}}\right| = \frac{1}{\alpha} = 0,0708 \Rightarrow \alpha = 14,1254 \quad (7)$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por atraso de fase

Para altas frequências:

$$\lim_{s\to\infty} = \left|\frac{Tj\omega+1}{\alpha Tj\omega+1}\right| = \left|\frac{Tj+\frac{1}{\omega}}{\alpha Tj+\frac{1}{\omega}}\right| = \frac{1}{\alpha} = 0,0708 \Rightarrow \alpha = 14,1254 \qquad (7)$$

Para não reduzir a margem de fase, o zero do compensador deve ser escolhido abaixo da frequência crítica $\omega \cong 1,6$ (rad/s). Escolhendo-se o zero uma década abaixo desta frequência obtém-se
$s = -1/T = 0,16 \Rightarrow T = 6,25$.
A função de transferência do compensador resultante é:

$$G(s) = \frac{K(Ts+1)}{\alpha Ts+1} = \frac{12,25(6,25s+1)}{88,28s+1} = \frac{0,8672(s+0,16)}{s+0,0113} \qquad (8)$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por avanço e atraso de fase

A compensação por avanço e atraso de fase é indicada quando se deseja melhorar simultaneamente as margens de estabilidade e o erro no estado estacionário.

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por avanço e atraso de fase

A compensação por avanço e atraso de fase é indicada quando se deseja melhorar simultaneamente as margens de estabilidade e o erro no estado estacionário. A função de transferência do compensador resultante é:

$$G(s) = KG_{av}(s)G_{at}(s) = K\left(\frac{T_1 s + 1}{\frac{T_1}{\alpha}s + 1}\right)\left(\frac{T_2 s + 1}{\alpha T_2 s + 1}\right), \text{ou}, \tag{9}$$

$$G(s) = KG_{av}(s)G_{at}(s) = K\left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\alpha}{T_1}}\right)\left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\alpha T_2}}\right) \tag{10}$$

Para $\alpha > 1$ e $T_1 < T_2$

Compensação por meio da resposta em frequência

Compensação por avanço e atraso de fase

Parte do compensador em avanço:

$$G_{av}(s) = \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\alpha}{T_1}} \right) \qquad (11)$$

Parte do compensador em atraso:

$$G_{at}(s) = \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\alpha T_2}} \right) \qquad (12)$$

Figure: Diagrama de Bode do compensador em Avanço e Atraso.

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo 2: Compensação por avanço e atraso de fase

Projete um compensador que:

- a resposta ao degrau apresente erro em regime estacionário igual a 0,02;
- a margem de fase seja de 50^o.

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo 2: Compensação por avanço e atraso de fase

A função de transferência em malha aberta com o compensador é dada por:

$$G_{MA}(s) = G_c(s)G(s) = K\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\alpha}{T_1}}\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\alpha T_2}}\frac{1}{(s+1)^2(s+10)} \tag{13}$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo 2: Compensação por avanço e atraso de fase

A função de transferência em malha aberta com o compensador é dada por:

$$G_{MA}(s) = G_c(s)G(s) = K\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\alpha}{T_1}}\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\alpha T_2}}\frac{1}{(s+1)^2(s+10)} \quad (13)$$

O erro estacionário é calculado como:

$$e(\infty) = \lim_{s\to\infty}\left(\frac{1}{1+G_{MA}(s)}\right) = \lim_{s\to\infty}\left(\frac{1}{1+K\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\alpha}{T_1}}\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\alpha T_2}}\frac{1}{(s+1)^2(s+10)}}\right) \quad (14)$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo 2: Compensação por avanço e atraso de fase

A função de transferência em malha aberta com o compensador é dada por:

$$G_{MA}(s) = G_c(s)G(s) = K\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\alpha}{T_1}}\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\alpha T_2}}\frac{1}{(s+1)^2(s+10)} \tag{15}$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo 2: Compensação por avanço e atraso de fase

A função de transferência em malha aberta com o compensador é dada por:

$$G_{MA}(s) = G_c(s)G(s) = K\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\alpha}{T_1}}\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\alpha T_2}}\frac{1}{(s+1)^2(s+10)} \tag{15}$$

O erro estacionário é calculado como:

$$e(\infty) = \frac{1}{1+\frac{K}{10}} \Rightarrow K = 490 \tag{16}$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo 2: Compensação por avanço e atraso de fase

A margem de fase é medida na frequência de corte ω_c no qual o ganho é igual a 1. A margem de fase desejada é de $MF = 50^o$. Assim:

$$MF = 180^o + \angle G_{MA}(j\omega_c) = 180^o + \angle G_c(j\omega_c) + \angle G(j\omega_c)$$

ou,

$$MF = 180^o + \angle G_{av}(j\omega_c) + \angle G_{at}(j\omega_c) + \angle G(j\omega_c)$$

Supõe-se que a margem de fase é dada apenas pelo compensador em avanço sendo $\angle G_{av}(j\omega_c) = 50^o$

Figure: Exemplo 2: diagrama de Bode de $KG(j\omega)$.

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo 2: Compensação por avanço e atraso de fase

O valor α é calculado a partir de $MF = 50^o$ por meio da equação:

$$\sin\phi_m = \frac{1-a}{1+a} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \tag{17}$$

Lembrando que $a = \frac{1}{\alpha}$, então:

$$\sin\phi_m = \sin 50^o = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \Rightarrow \alpha = 7,5486. \tag{18}$$

Deste modo:

$$G_{at}(s) = \frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\alpha T_2}} = \frac{s+0,41}{s+0,0543}. \tag{19}$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo 2: Compensação por avanço e atraso de fase

$$\omega_m = \omega_c = \frac{1}{\sqrt{a}T_1} \Rightarrow \frac{\alpha}{\omega_c} \cong 0,67 \tag{20}$$

Deste modo:

$$G_{av}(s) = \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\alpha}{T_1}} = \frac{s + 1,4923}{s + 11,2647}. \tag{21}$$

Figure: Exemplo 2: fase de $G(j\omega)$.

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo 2: Compensação por avanço e atraso de fase

A função de transferência do compensador em avanço e atraso é:

$$G_c(s) = 490\left(\frac{s + 1,4923}{s + 11,2647}\right)\left(\frac{s + 0,41}{s + 0,0543}\right). \tag{22}$$

Exemplo 2: A margem de fase é dada por:

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo 2: Compensação por avanço e atraso de fase

A função de transferência do compensador em avanço e atraso é:

$$G_c(s) = 490\left(\frac{s+1,4923}{s+11,2647}\right)\left(\frac{s+0,41}{s+0,0543}\right). \tag{22}$$

Exemplo 2: A margem de fase é dada por:

$$\begin{aligned} MF &= 180^o + \angle G_c(s) + \angle G(s) \\ MF &= 180^o + 45^o - 175^o = 50^o \end{aligned} \tag{23}$$

sendo $\angle G_c(s) = \angle G_{at}(s) + \angle G_{av}(s) = -5^o + 50^o = 45^o$

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo 2: Compensação por avanço e atraso de fase

A função de transferência do compensador em avanço e atraso é:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{490(s+1,4923)(s+0,41)}{s^5+23,32s^4+157,44s^3+745,04s^2+1058,16s+305,92}$$

$$= \frac{490(s+1,4923)(s+0,41)}{(s+0,3859)(s+1,5612)(s+16,1928)(s+2,5895\pm j4,9653)}. \quad (24)$$

e

$$e(\infty) = 1 - 0,98 = 0,02 \quad (25)$$

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo 2: Compensação por avanço e atraso de fase

Figure: Exemplo 2: fase de $G(j\omega)$.

Compensação por meio da resposta em frequência

Exemplo 2: Compensação por avanço e atraso de fase

Figure: Exemplo 2: fase de $G(j\omega)$.

Fim