

# Aula 18: Projeto de controladores no domínio da frequência

prof. Dr. Eduardo Bento Pereira

Universidade Federal de São João del-Rei

*ebento@ufsj.edu.br*

# A resposta em frequência

## Sistemas Lineares Invariantes no Tempo SISO

Considere o sistema, representado no diagrama abaixo, sujeito a uma entrada do tipo

$$u(t) = A \sin \omega t \quad (1)$$

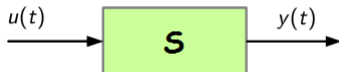


Figure: Diagrama de exemplo de um sistema em malha fechada.

# A resposta em frequência

Cuja transformada de Laplace é dada por

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{A \sin \omega t\} = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} = U(s) \quad (2)$$

## A resposta em frequência

Cuja transformada de Laplace é dada por

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{A \sin \omega t\} = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} = U(s) \quad (2)$$

A transformada de Laplace para a saída  $y(t)$  pode ser calculada como

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (3)$$

# A resposta em frequência

Expandido  $Y(s)$  em frações parciais e considerado apenas a existência de pólos reais (por simplicidade)

$$Y(s) = \frac{a}{s + j\omega} + \frac{a^*}{s + j\omega} + \frac{c_1}{s + p_1} + \frac{c_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s + p_n} \quad (4)$$

# A resposta em frequência

Expandido  $Y(s)$  em frações parciais e considerado apenas a existência de pólos reais (por simplicidade)

$$Y(s) = \frac{a}{s + j\omega} + \frac{a^*}{s + j\omega} + \frac{c_1}{s + p_1} + \frac{c_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s + p_n} \quad (4)$$

em que  $c_1, c_2, \cdots c_n$  são constantes e  $a^*$  o conjugado de  $a$ , calculados por

$$a = \left[ (s + j\omega) \frac{G(s)A\omega}{s^2 + \omega^2} \right]_{s=-j\omega} = \left[ \frac{G(s)A\omega}{s^2 - j\omega^2} \right]_{s=-j\omega} = -\frac{AG(-j\omega)}{2j} \quad (5)$$

e

$$a^* = \left[ (s - j\omega) \frac{G(s)A\omega}{s^2 + \omega^2} \right]_{s=j\omega} = \left[ \frac{G(s)A\omega}{s^2 + j\omega^2} \right]_{s=j\omega} = \frac{AG(j\omega)}{2j} \quad (6)$$

## A resposta em frequência

Expandido  $Y(s)$  em frações parciais e considerado apenas a existência de pólos reais (por simplicidade)

$$Y(s) = \frac{a}{s + j\omega} + \frac{a^*}{s + j\omega} + \frac{c_1}{s + p_1} + \frac{c_2}{s + p_2} + \dots + \frac{c_n}{s + p_n} \quad (7)$$

A partir destes coeficientes é possível calcular a transformada inversa

$$y(t) = -\frac{AG(-j\omega)}{2j}e^{-j\omega t} + \frac{AG(j\omega)}{2j}e^{j\omega t} + c_1e^{-p_1t} + c_2e^{-p_2t} + \dots + c_ne^{-p_nt} \quad (8)$$

Considerando que os pontos de equilíbrio do sistema representado por  $G(s)$  são estáveis, os pólos  $p_1, p_2, \dots, p_n$  possuem parte real negativa e as exponenciais referentes a estes pólos tendem a zero quando  $t \rightarrow \infty$

# A resposta em frequência

A resposta em regime se resume a

$$y_{\infty}(t) = -\frac{AG(-j\omega)}{2j}e^{-j\omega t} + \frac{AG(j\omega)}{2j}e^{-j\omega t} \quad (9)$$



# A resposta em frequência

A resposta em regime se resume a

$$y_{\infty}(t) = -\frac{AG(-j\omega)}{2j}e^{-j\omega t} + \frac{AG(j\omega)}{2j}e^{-j\omega t} \quad (9)$$

O módulo e a fase de  $G(j\omega)$  (quando  $s = j\omega$ ) são, respectivamente, denotados por  $|G(j\omega)|$  e  $\angle G(j\omega) = \phi(\omega)$ . Pode-se representar  $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$  e  $G(-j\omega) = |G(j\omega)|e^{-j\phi(\omega)}$ , o que permite escrever a Equação (9) como

$$\begin{aligned} y_{\infty}(t) &= A|G(j\omega)| \left( \frac{e^{j\omega t + \phi(\omega)} - e^{-j\omega t + \phi(\omega)}}{2j} \right) \\ &= A|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi(\omega)). \end{aligned} \quad (10)$$

# A resposta em frequência

A resposta  $y(t)$

$$y_{\infty}(t) = A|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi(\omega)). \quad (11)$$

- A saída permanente de um sistema LTI a uma entrada senoidal consiste em uma senoíde de mesma frequência da entrada;

# A resposta em frequência

A resposta  $y(t)$

$$y_{\infty}(t) = A|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi(\omega)). \quad (11)$$

- A saída permanente de um sistema LTI a uma entrada senoidal consiste em uma senóide de mesma frequência da entrada;
- A amplitude da senóide da saída é  
 $|Y(j\omega)| = |G(j\omega)||U(j\omega)| = A|G(j\omega)|;$

# A resposta em frequência

A resposta  $y(t)$

$$y_{\infty}(t) = A|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi(\omega)). \quad (11)$$

- A saída permanente de um sistema LTI a uma entrada senoidal consiste em uma senóide de mesma frequência da entrada;
- A amplitude da senóide da saída é  
 $|Y(j\omega)| = |G(j\omega)||U(j\omega)| = A|G(j\omega)|;$
- O ângulo de defasagem entre o sinal de entrada e o de saída é  
 $\phi(\omega) = \angle G(j\omega)$

# A resposta em frequência

A resposta  $y(t)$

$$y_{\infty}(t) = A|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi(\omega)). \quad (11)$$

- A saída permanente de um sistema LTI a uma entrada senoidal consiste em uma senóide de mesma frequência da entrada;
- A amplitude da senóide da saída é  
 $|Y(j\omega)| = |G(j\omega)||U(j\omega)| = A|G(j\omega)|;$
- O ângulo de defasagem entre o sinal de entrada e o de saída é  
 $\phi(\omega) = \angle G(j\omega)$
- Para se obter a resposta de uma entrada senoidal em um sistema representado por  $G(s)$  basta calcular o módulo e a fase do número complexo resultante.

# A resposta em frequência

A resposta  $y(t)$

$$y_{\infty}(t) = A|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi(\omega)). \quad (11)$$

- A saída permanente de um sistema LTI a uma entrada senoidal consiste em uma senóide de mesma frequência da entrada;
- A amplitude da senóide da saída é  
 $|Y(j\omega)| = |G(j\omega)||U(j\omega)| = A|G(j\omega)|;$
- O ângulo de defasagem entre o sinal de entrada e o de saída é  
 $\phi(\omega) = \angle G(j\omega)$
- Para se obter a resposta de uma entrada senoidal em um sistema representado por  $G(s)$  basta calcular o módulo e a fase do número complexo resultante.

# Diagrama de Bode - Revisão

## Gráficos de Bode

Os gráficos que representam o diagrama de Bode mostram a resposta em frequência:

- do módulo de  $G(j\omega)$  *versus* frequência (em escala logarítmica). O módulo também pode ser escrito em escala logarítmica por meio da expressão  $20 \log |G(j\omega)|$ ;
- da fase de  $G(j\omega)$  *versus* frequência (em escala logarítmica).

# Diagrama de Bode - Revisão

## Vastagem da escala logarítmica

Os gráficos que representam o diagrama de Bode mostram a resposta em frequência:

- permite transformar operações de multiplicação e divisões em soma e subtração;



# Diagrama de Bode - Revisão

## Vastagem da escala logarítmica

Os gráficos que representam o diagrama de Bode mostram a resposta em frequência:

- permite transformar operações de multiplicação e divisões em soma e subtração;
- permite aproximar trechos da resposta em frequência por seguimentos de reta, cujas interseções são associadas aos pólos e zeros da função de transferência;

# Diagrama de Bode - Revisão

## Vastagem da escala logarítmica

Os gráficos que representam o diagrama de Bode mostram a resposta em frequência:

- permite transformar operações de multiplicação e divisões em soma e subtração;
- permite aproximar trechos da resposta em frequência por seguimentos de reta, cujas interseções são associadas aos pólos e zeros da função de transferência;
- permite representar uma maior faixa de frequências no mesmo gráfico.

# Diagrama de Bode - Revisão

## Ganho constante

Considere a função de transferência representada por

$$G(j\omega) = K. \quad (12)$$

## Módulo

$$|G(j\omega)| = 20 \log |K|. \quad (13)$$

## Fase

$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{para } K > 0 \\ \pm 180^\circ & \text{para } K < 0 \end{cases} \quad (14)$$

# Diagrama de Bode - Revisão

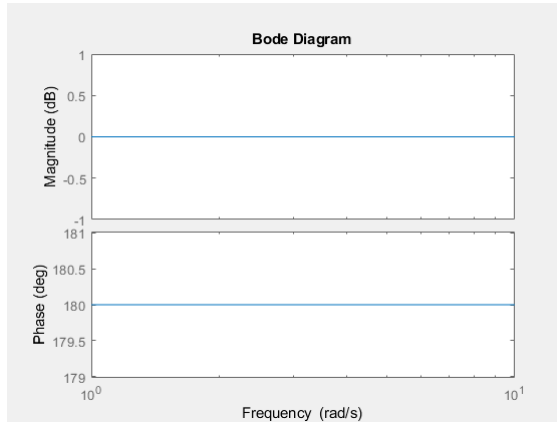


Figure: Diagrama de Bode para FT constante.

# Diagrama de Bode - Revisão

Pólo na origem

Considere a função de transferência representada por

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}. \quad (15)$$

Módulo

$$|G(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = 20 \log \omega^{-1} = -20 \log \omega \quad (\text{dB}). \quad (16)$$

Fase

$$\angle G(j\omega) = -90^0 \quad (17)$$

para todo valor de  $\omega$ .

# Diagrama de Bode - Revisão

## Representação logarítmica

Definindo  $X(\omega) = \log \omega$ , pode-se reescrever o cálculo do módulo como:

$$|G(j\omega)| = -20x(\omega) \quad (18)$$

O que mostra que o gráfico de  $|G(j\omega)|$ , em escala logarítmica, é uma reta com inclinação de  $-20$  dB/Década, sendo que a reta passa por 0 dB na frequência de  $\omega = 1$  rad/s

Table: Alguns valores do módulo de  $G(j\omega)$

$\omega$ (rad/s)	$ G(j\omega) $ (dB)
0,1	20
1	0
10	-20
100	-40

# Diagrama de Bode - Revisão

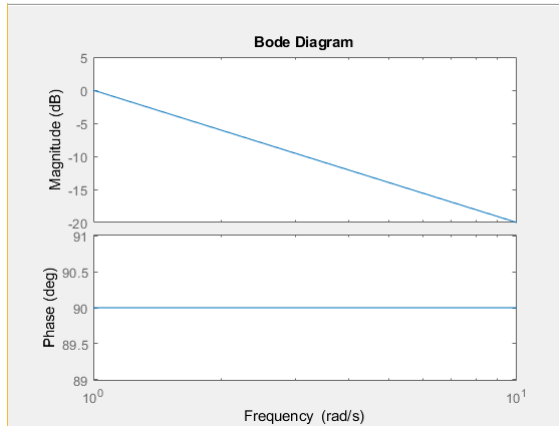


Figure: Diagrama de Bode para 1 pólo na origem.

## Diagrama de Bode - Revisão

### Zero na origem

Considere a função de transferência representada por

$$G(j\omega) = j\omega. \quad (19)$$

### Módulo

$$|G(j\omega)| = 20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \quad (\text{dB}). \quad (20)$$

Assim, o gráfico do módulo de um zero na origem é uma reta de inclinação de 20 dB com origem em  $\omega = 1$  rad/s

### Fase

$$\angle G(j\omega) = 90^\circ \quad (21)$$

para todo valor de  $\omega$ .



# Diagrama de Bode - Revisão

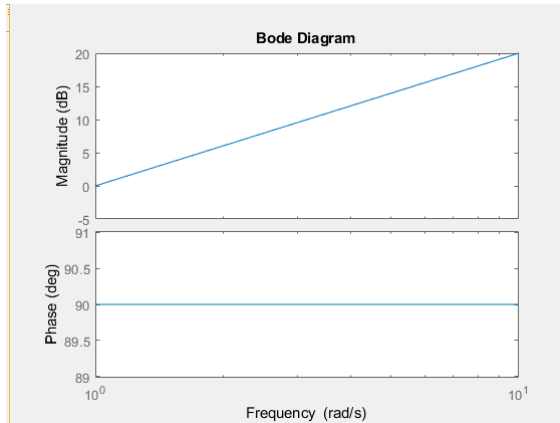


Figure: Diagrama de Bode para 1 zero na origem.

# Diagrama de Bode - Revisão

Pólo real fora da origem

Considere a função de transferência representada por

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}. \quad (22)$$

O módulo de  $G(j\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega T + 1} \right| = 20 \log |j\omega T + 1|^{-1} = -20 \log |j\omega T + 1|$

$\omega T$ (rad)	$ G(j\omega) $ (dB)	$\angle G(j\omega)$ ( $0^\circ$ )
$\ll 1$	$-20 \log  1  \cong 0$	$\cong 0$
$\gg 1$	$-20 \log  j\omega T $	$\cong -90$
$\omega = \frac{1}{T}$	$-20 \log  j + 1  = -20 \log \sqrt{2} = -3$	$-\arctan(-1) = -45$

# Diagrama de Bode - Revisão

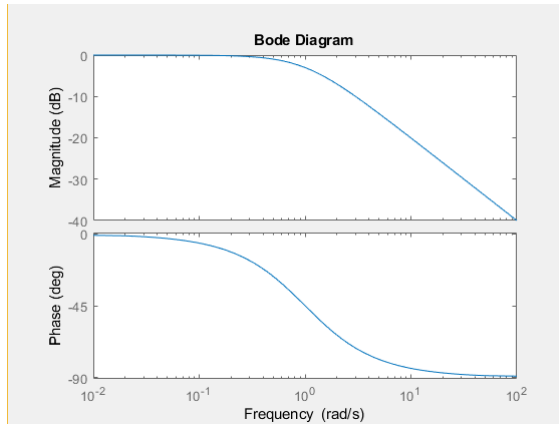


Figure: Diagrama de Bode para 1 pólo real fora da origem.

# Diagrama de Bode - Revisão

Zero real fora da origem

Considere a função de transferência representada por

$$G(s) = Ts + 1. \quad (23)$$

O módulo de  $G(j\omega) = 20 \log |j\omega T + 1|$ .

$\omega T$ (rad)	$ G(j\omega) $ (dB)	$\angle G(j\omega)$ ( $0^\circ$ )
$\ll 1$	$-20 \log  1  \cong 0$	$\cong 0$
$\gg 1$	$-20 \log  j\omega T $	$\cong 90$
$\omega = \frac{1}{T}$	$-20 \log  j + 1  = -20 \log \sqrt{2} = -3$	$-\arctan(-1) = 45$

# Diagrama de Bode - Revisão

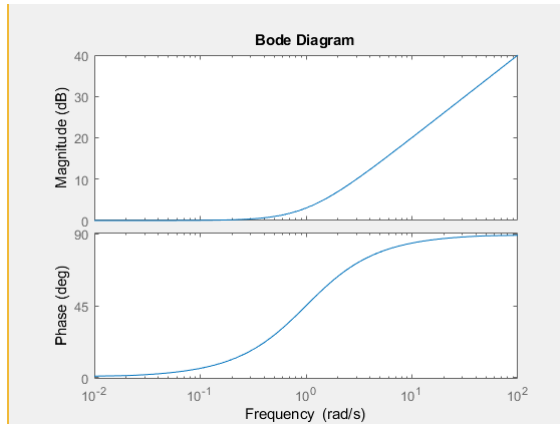


Figure: Diagrama de Bode para 1 zero real fora da origem.

# Diagrama de Bode - Revisão

## Pólos complexos conjugados

Considere a função de transferência representada por

$$G(s) = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (24)$$

em  $0 < \zeta < 1$ . O módulo de  $G(j\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 T + \frac{2\zeta j\omega}{\omega_n} + 1} \right| =$   
 $-20 \log \left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j\frac{2\zeta\omega}{\omega_n} \right|.$

# Diagrama de Bode - Revisão

## Pólos complexos conjugados

Considere a função de transferência representada por

$$G(s) = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (24)$$

em  $0 < \zeta < 1$ . O módulo de  $G(j\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 T + \frac{2\zeta j\omega}{\omega_n} + 1} \right| =$   
 $-20 \log \left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j\frac{2\zeta\omega}{\omega_n} \right|.$

Para baixas frequências ( $\omega \ll \omega_n$ )

$$|G(j\omega)| \cong -20 \log |1| \cong 0(\text{dB}). \quad (25)$$

# Diagrama de Bode - Revisão

Para altas frequências ( $\omega \gg \omega_n$ )

$$|G(j\omega)| \cong -20 \log \left| - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right| \cong -40 \log \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) \text{ (dB)}. \quad (26)$$



# Diagrama de Bode - Revisão

Para altas frequências ( $\omega \gg \omega_n$ )

$$|G(j\omega)| \cong -20 \log \left| - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right| \cong -40 \log \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) \text{ (dB)}. \quad (26)$$

Para  $\omega = \omega_n$

$$|G(j\omega)| \cong -20 \log |j2\zeta| = -20 \log(2\zeta) \text{ (dB)}. \quad (27)$$

# Diagrama de Bode - Revisão

A fase para  $s = j\omega$  é calculado por

$$\angle G(j\omega) = -\arctan \left( \frac{\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right). \quad (28)$$

$\omega T$ (rad)	$ G(j\omega) $ (dB)	$\angle G(j\omega)$ ( $0^\circ$ )
$\omega \ll \omega_n$	$-20 \log  1  \cong 0$	$\cong 0$
$\gg 1$	$-40 \log \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)$	$\cong -180$
$\omega = \omega_n$	$-20 \log(2\zeta) =$	$-90$

# Diagrama de Bode - Revisão

A frequência de ressonância ( $\omega_r$ )

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\zeta j\omega}{\omega_n} + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{e\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (29)$$

# Diagrama de Bode - Revisão

A frequência de ressonância ( $\omega_r$ )

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\zeta j\omega}{\omega_n} + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (29)$$

A ressonância ocorre quando  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$  para  $0 \leq \zeta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

# Diagrama de Bode - Revisão

A frequência de ressonância ( $\omega_r$ )

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\zeta j\omega}{\omega_n} + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{e\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (29)$$

A ressonância ocorre quando  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$  para  $0 \leq \zeta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ . O valor do ganho na frequência de ressonância é dado por

$$M_r = |G(\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad (30)$$

para  $0 \leq \zeta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

# Diagrama de Bode - Revisão

A frequência de ressonância ( $\omega_r$ )

O pico de ressonância depende do coeficiente de amortecimento  $\zeta$ . Na prática, o coeficiente de amortecimento com valores  $0,4 \leq \zeta \leq 0,7$  provocam respostas transitórias aceitáveis correspondendo a picos de ressonância com valores  $0\text{dB} \leq M_r \leq 3\text{dB}$ .

# Diagrama de Bode - Revisão

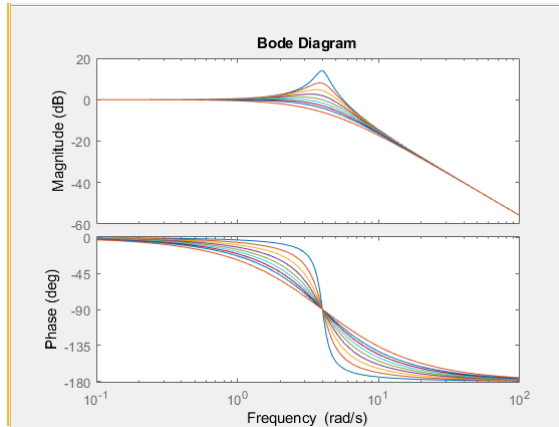


Figure: Diagrama de Bode para 2 pólos complexos conjugados.

# Diagrama de Bode - Revisão

## Zeros complexos conjugados

Considere a função de transferência representada por

$$G(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2}. \quad (31)$$

$G(j\omega) = \frac{(j\omega_n)^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2}{\omega_n^2}$ . O módulo de  $G(j\omega)$  é:

$$|G(j\omega)| = 20 \log \left| 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + j \frac{2\zeta\omega}{\omega_n} \right|. \quad (32)$$

e a fase:

$$\angle G(j\omega) = \left( \frac{\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right). \quad (33)$$



# Diagrama de Bode - Revisão

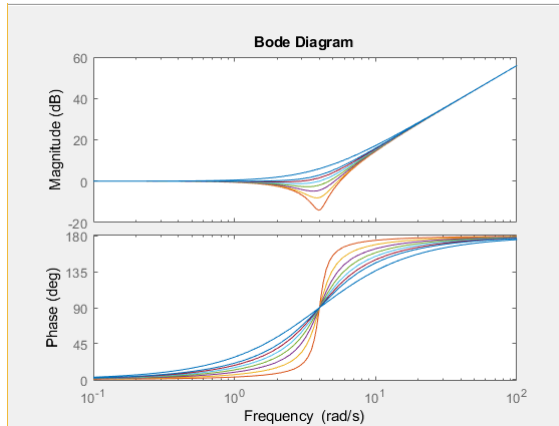


Figure: Diagrama de Bode para 2 zeros complexos conjugados.

# Diagrama de Bode - Revisão

## Diagrama de Bode

O pico de ressonância depende do coeficiente de amortecimento  $\zeta$ . Na prática, o coeficiente de amortecimento com valores  $0,4 \leq \zeta \leq 0,7$  provocam respostas transitórias aceitáveis correspondendo a picos de ressonância com valores  $0\text{dB} \leq M_r \leq 3\text{dB}$ .

# Fim