Aula 17: Projeto de controladores pelo lugar das raízes

prof. Dr. Eduardo Bento Pereira

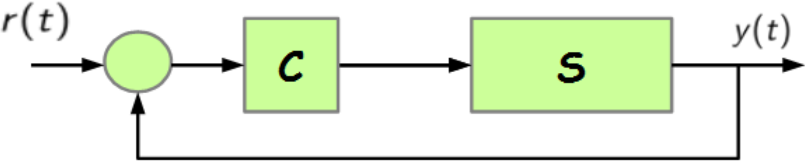
Universidade Federal de São João del-Rei

ebento@ufsj.edu.br

Desenhando o lugar das raízes - Revisão

Exemplo

Considere o sistema representado no diagrama abaixo:



Desenhando o lugar das raízes - Revisão

Exemplo

Sendo:

$$C(s) = K \tag{1}$$

e

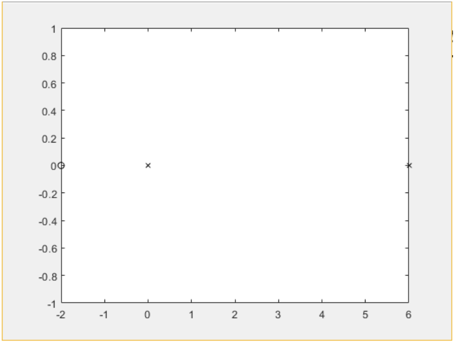
$$G(s) = \frac{s+2}{s(s-6)} \tag{2}$$

Desenhando o lugar das raízes - Revisão

Desenhar os pólos e zeros de malha aberta no gráfico.

PASSO 1: Número de ramos

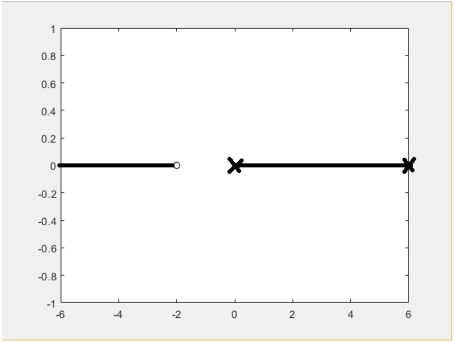
O número de ramos (n) serígual ao número de pólos, ou seja, $n = 2$.



Desenhando o lugar das raízes - Revisão

PASSO 2: Lugar das raízes sobre o eixo real

Um ponto de teste s pertence ao lugar das raízes se o número de pólos e zeros a sua direita for ímpar.



Desenhando o lugar das raízes - Revisão

Passo 3: Pontos de início e término

O ramos terminam nos zeros de malha aberta, condição na qual $K \to \infty$ (Condição de módulo).

Desenhando o lugar das raízes - Revisão

PASSO 4: Assíntotas

O número de assíntotas é igual a $n - m$, sendo n o número de pólos, m o número de zeros e $n > m$. O número de assíntotas é $n - m = 2 - 1 = 1$

$$m\alpha - n\alpha = 180^o \pm r360^o \tag{3}$$

Com $r = 0, 1, 2, ...$

$$\alpha_{n-m} = (2n - 2m - 1)\frac{180^o}{n - m} = (4 - 2 - 1)\frac{180^o}{2 - 1} = 180^o \tag{4}$$

Desenhando o lugar das raízes - Revisão

PASSO 4: Assíntotas

O número de assíntotas é igual a $n - m$, sendo n o número de pólos, m o número de zeros e $n > m$. O número de assíntotas é $n - m = 2 - 1 = 1$

$$m\alpha - n\alpha = 180^o \pm r360^o \tag{3}$$

Com $r = 0, 1, 2, ...$

$$\alpha_{n-m} = (2n - 2m - 1)\frac{180^o}{n - m} = (4 - 2 - 1)\frac{180^o}{2 - 1} = 180^o \tag{4}$$

As assíntotas cruzam o eixo real no ponto

$$S_c = \frac{(\text{soma dos pólos de malha aberta}) - (\text{soma dos zeros de malha aberta})}{n - m} \tag{5}$$

Desenhando o lugar das raízes - Revisão

PASSO 5: Pontos de partida e chegada sobre o exio real

Os pontos de partida ou chegada podem ser calculados por

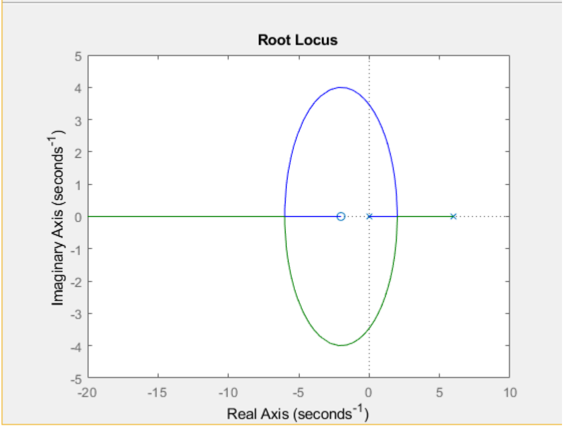
$$\frac{d(k)}{ds} = -\left[\frac{D'(s)N(s) - D(s)N'(s)}{N(s)^2}\right] = 0 \tag{6}$$

Para o exemplo, tem-se:

$$\frac{d(k)}{ds} = -\left[\frac{(2s-6)(s+2) - (s^2 - 6s)}{(s+2)^2}\right] = 0, \tag{7}$$

resultando em ${}^2s^2 + 4s - 6s - 12 - s^2 + 6s = 0$, ou, $s^2 + 4s - 12 = 0$ com raízes em $s = 2$ e $s = -6$.

Desenhando o lugar das raízes - Revisão



Lugar das raízes para sistemas com atraso puro de tempo

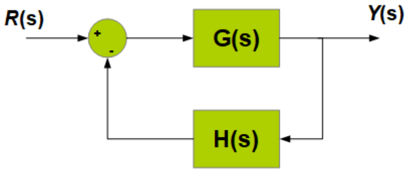
Exemplo de um sistema de primeira ordem

Considere o sistema cuja função de transferência em malha aberta é dada por

$$G(s) = \frac{Ke^{-2s}}{s+1}. \tag{8}$$

A função de transferência em malha fechada é:

$$C_{MF}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{MA}(s)}{1+G_{MA}(s)} = \frac{Ke^{-2s}}{s+1+Ke^{-2s}}. \tag{9}$$



Lugar das raízes - Revisão

Lugar das raízes para sistemas com atraso puro de tempo

O valor do ganho sobre o eixo imaginário pode ser calculado substiuindo-se $s = 0 + j\omega$ na equação característica:

$$j\omega + 1 + Ke^{-2j\omega} = 0 \Rightarrow 1 + K\cos(2\omega) + j[\omega - K\mathrm{sen}(2\omega)] = 0 \tag{10}$$

Lugar das raízes - Revisão

Lugar das raízes para sistemas com atraso puro de tempo

O valor do ganho sobre o eixo imaginário pode ser calculado substiuindo-se $s = 0 + j\omega$ na equação característica:

$$j\omega + 1 + Ke^{-2j\omega} = 0 \Rightarrow 1 + K\cos(2\omega) + j[\omega - K\mathrm{sen}(2\omega)] = 0 \qquad (10)$$

Ao igualar a zero as partes reais e imaginárias, tem-se:

$$K = -\frac{1}{\cos(2\omega)} \qquad (11)$$

e

$$\omega - K\mathrm{sen}(2\omega) = 0 \Rightarrow \omega + \tan(2\omega) = 0 \qquad (12)$$

$\omega \cong 1,14446$ e $K \cong 1,5$.

Lugar das raízes - Revisão

Lugar das raízes para sistemas com atraso puro de tempo

Como $\omega = 2\pi r$ e $r = 1, 2, 3, \cdots$, existem infinitos pólos sobre o eixo imaginário.
A estabilidade está relacionada ao ponto $r = 0$ que define $K < 1,5$ para que os pontos de equilíbrio sejam estáveis.

Lugar das raízes para sistemas com atraso puro de tempo

Aproximação de Padé

Devido ao fato de que a representação exponencial do atraso puro de tempo ser não linear, é necessário fazer uma aproximção na forma de racional, como por exemplo, a aproximação de Padé de ordem (m, n). Para a função e^{-Ts} tem-se:

Ordem(1,1)	Ordem(2,2)	Ordem(3,3)
$G(s) = \frac{-Ts+2}{Ts+2}$	$G(s) = \frac{T^2s^2-6TS+12}{T^2s^2+6TS+12}$	$\frac{-T^3s^3+12T^2s^2-60TS+120}{T^3s^3+12T^2s^2+60TS+120}$

Lugar das raízes para sistemas com atraso puro de tempo

Aproximação de Padé

Devido ao fato de que a representação exponencial do atraso puro de tempo ser não linear, é necessário fazer uma aproximção na forma de racional, como por exemplo, a aproximação de Padé de ordem (m, n). Para a função e^{-Ts} tem-se:

Ordem(1,1)	Ordem(2,2)	Ordem(3,3)
$G(s) = \frac{-Ts+2}{Ts+2}$	$G(s) = \frac{T^2s^2-6TS+12}{T^2s^2+6TS+12}$	$\frac{-T^3s^3+12T^2s^2-60TS+120}{T^3s^3+12T^2s^2+60TS+120}$

Para o sistema $G(s) = \frac{e^{-2s}}{s+1}$:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}\frac{-2s+2}{2s+2} = \frac{-s+1}{(s+1)^2}$$

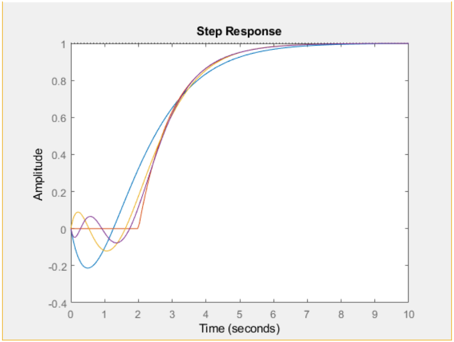
$$G_2(s) = \frac{1}{s+1}\frac{4s^2-12s+12}{4s^2+12s+12} = \frac{s^2-3s+3}{(s+1)(s^2+3s+3)}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{s+1}\frac{-8s^3+48s^2-120s+120}{8s^3+48s^2+120s+120} = \frac{-s^3+6s^2-15s+15}{(s+1)(s^3+6s^2+15s+15)}$$

Lugar das raízes para sistemas com atraso puro de tempo

Aproximação de Padé

Resposta ao degrau para o sistema $G(s) = \frac{e^{-2s}}{s+1}$:



Lugar das raízes para sistemas com atraso puro de tempo

Exemplo de aproximação de Padé

Considere a aproximação de Padé de ordem(1,1) para o sistema $G(s) = \frac{e^{-2s}}{s+1}$:

$$G_{MA}(s) = \frac{-K(s-1)}{(s+1)^2} \tag{13}$$

A função de transferência em malha fechada para este sistema ́dada por:

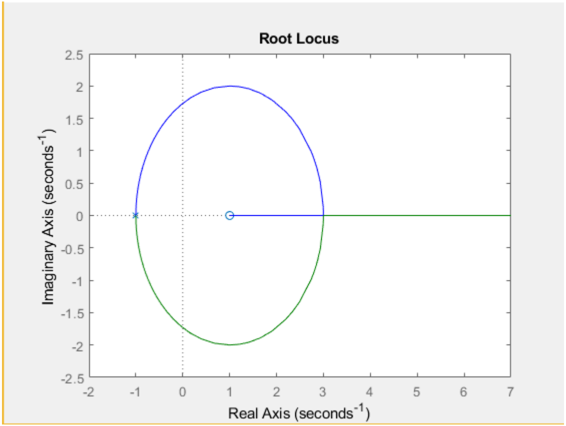
$$G_{MF}(s) = \frac{G_{MA}(s)}{1+G_{MA}(s)} = \frac{-K(s-1)}{s^2+(2-K)s+1+K} \tag{14}$$

Critério de Routh-Hurwitz

Supondo $K > 0$, o sistema éstável para $0 < K < 2$, o que permite valores de $K > 1,5$. Para melhorar a precisão seria necessário usar uma aproximação de ordem mais elevada, o que, porém, eleva a dificuldade dos cálculos.

Lugar das raízes para sistemas com atraso puro de tempo

Exemplo de aproximação de Padé



Fim