# Aula 14: Projeto de controladores pelo lugar das raízes

prof. Dr. Eduardo Bento Pereira

Universidade Federal de São João del-Rei

*ebento@ufsj.edu.br*

# Projeto de controladores pelo método do Lugar das Raízes

**Cenário.**

- A planta é inalterável e sua dinâmica não corresponde as especificações desejadas.

# Projeto de controladores pelo método do Lugar das Raízes

## Cenário.

- A planta é inalterável e sua dinâmica não corresponde as especificações desejadas.
- O lugar das raízes permite ver se apenas uma mudança de ganho (ou outro parâmetro) seria o suficiente para que as especificações sejam atendidas;

# Projeto de controladores pelo método do Lugar das Raízes

**Cenário.**

- A planta é inalterável e sua dinâmica não corresponde as especificações desejadas.
- O lugar das raízes permite ver se apenas uma mudança de ganho (ou outro parâmetro) seria o suficiente para que as especificações sejam atendidas;
- Objetivo: Modificar o lugar das raízes para que o sistema em malha fechada possa atender os requisitos por meio da introdução de um compensador

# Projeto pelo método do lugar das raízes

## Considerações:

- O método consiste em se modificar o lugar das raízes por meio do acréscimo de pólos e zeros à função de transferência de malha fechada do sistema forçando que o desenho do lugar das raízes passe pelos pólos de malha fechada desejados.

# Projeto pelo método do lugar das raízes

## Considerações:

- O método consiste em se modificar o lugar das raízes por meio do acréscimo de pólos e zeros à função de transferência de malha fechada do sistema forçando que o desenho do lugar das raízes passe pelos pólos de malha fechada desejados.
- Os pólos de malha fechada desejados são calculados a partir das especificações de desempenho;

# Projeto pelo método do lugar das raízes

Considerações:

- O método consiste em se modificar o lugar das raízes por meio do acréscimo de pólos e zeros à função de transferência de malha fechada do sistema forçando que o desenho do lugar das raízes passe pelos pólos de malha fechada desejados.
- Os pólos de malha fechada desejados são calculados a partir das especificações de desempenho;
- O método se basea na consideração da existência de um par de pólos dominantes no sistema em malha fechada e é eficiente quando as especificações de desempenho são dadas no domínio do tempo (sobressinal, tempo de subida, etc.);

# Projeto pelo método do lugar das raízes

Considerações:

- O método consiste em se modificar o lugar das raízes por meio do acréscimo de pólos e zeros à função de transferência de malha fechada do sistema forçando que o desenho do lugar das raízes passe pelos pólos de malha fechada desejados.
- Os pólos de malha fechada desejados são calculados a partir das especificações de desempenho;
- O método se basea na consideração da existência de um par de pólos dominantes no sistema em malha fechada e é eficiente quando as especificações de desempenho são dadas no domínio do tempo (sobressinal, tempo de subida, etc.);
- Necessário compreender o efeito da adição de pólos e zeros no desenho do lugar das raízes.

# Relembrando

Considere a função de transferência de um sistema em malha fechada:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{1}$$

Sendo os pólos de malha fechada as raízes da equação característica:

$$1 + G(s)H(s) = 0, \tag{2}$$

$$G(s)H(s) = -1 + j0. \tag{3}$$

(escrita na forma complexa)

# Relembrando

Considere a função de transferência de um sistema em malha fechada:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{1}$$

Sendo os pólos de malha fechada as raízes da equação característica:

$$1 + G(s)H(s) = 0, \tag{2}$$

$$G(s)H(s) = -1 + j0. \tag{3}$$

(escrita na forma complexa)

Condição de módulo:

$$|G(s)H(s)| = 1 \tag{4}$$

Condição de ângulo:

$$\angle G(s)H(s) = 180^o \pm n360^o \tag{5}$$

com $n = 1, 2, ...$

# Relembrando

Considere o sistema de segunda ordem descrito pela equação:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{6}$$

# Relembrando

Considere o sistema de segunda ordem descrito pela equação:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{6}$$

Cujo o cálculo das raízes, para o caso subamortecido, são dados por:

$$s' = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{7}$$

e

$$s'' = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{8}$$

em que $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

# Relembrando

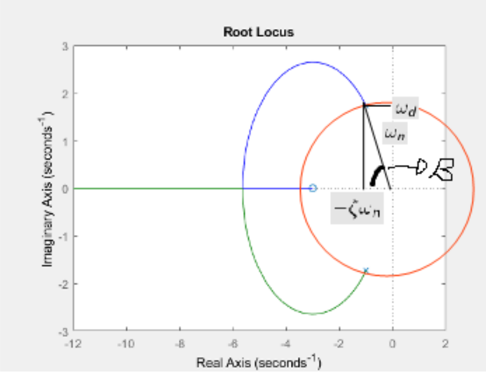


Figure: Lugar das raízes do sistema exemplo subasmortecido.

Figura gerada no Matlab por meio do *script* rlocus(tf([1 3],[1 5 9]))

# Relembrando

Figuras de mérito para um sistema de segunda ordem:

Constante de tempo: é $\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n}$. Tempo de subida:

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

Tempo de subida e tempo de pico:

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \times 100\%, \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d}\ (s)$$

Se utilizarmos uma faixa de 2%, o tempo de acomodação será de aproximadamente quatro constantes de tempo.

$$t_s = 4\tau = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

# Compensação por avanço de fase

## Compensador por avanço de fase (*phase lead*).

Considere a função de transferência para um compensador por avanço de fase:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + z_c}{s + p_c} \tag{9}$$

em que $z_c < p_c$.

## Propriedades:

A compensação por avanço de fase tem a propriedade de melhorar a resposta temporal do sistema com a redução do sobressinal e da resposta transitória.

# Compensação por avanço de fase

**Efeitos do avanço de fase:**

- Para qualquer ponto $s$ com $Re < 0$ e $Im > 0$, o compensador $G(s)$ adiciona fase na malha aberta devido a $\angle G(s) = \phi - \theta > 0$

Figure: Compensação em avanço de fase.

# Compensação por avanço de fase

## Projeto do compensador

1. Determinar a localização dos pólos de malha fechada de acordo com as especificações de desempenho (sobressinal, tempo de subida, tempo de acomodação, etc.);

# Compensação por avanço de fase

## Projeto do compensador

1. Determinar a localização dos pólos de malha fechada de acordo com as especificações de desempenho (sobressinal, tempo de subida, tempo de acomodação, etc.);
2. Alocar o zero e o pólo do compensador de modo que os pólos de malha fechada sejam alocados no lugar desejado;

# Compensação por avanço de fase

## Projeto do compensador

1. Determinar a localização dos pólos de malha fechada de acordo com as especificações de desempenho (sobressinal, tempo de subida, tempo de acomodação, etc.);
2. Alocar o zero e o pólo do compensador de modo que os pólos de malha fechada sejam alocados no lugar desejado;
3. Fixar a posição do zero e, então, calcular a posição do pólo por meio da condição de fase ($\angle G(s)H(s) = 180^o \pm n360^o$ com $n = 1, 2, ...$);

# Compensação por avanço de fase

## Projeto do compensador

1. Determinar a localização dos pólos de malha fechada de acordo com as especificações de desempenho (sobressinal, tempo de subida, tempo de acomodação, etc.);
2. Alocar o zero e o pólo do compensador de modo que os pólos de malha fechada sejam alocados no lugar desejado;
3. Fixar a posição do zero e, então, calcular a posição do pólo por meio da condição de fase ($\angle G(s)H(s) = 180^o \pm n360^o$ com $n = 1, 2, ...$);
4. Em seguida, calcular o ganho $K$ por meio da condição de módulo ($|G(s)H(s)| = 1$);

Figure: Compensação em avanço de fase.

# Compensação por avanço de fase

**Exemplo 1:**

Considere a função de transferência em malha aberta:

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{5}{s(s+1)} \tag{10}$$

Cuja função de transferência em malha fechada é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^2+s+5} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{11}$$

# Compensação por avanço de fase

**Exemplo 1:**

Considere a função de transferência em malha aberta:

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{5}{s(s+1)} \tag{10}$$

Cuja função de transferência em malha fechada é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^2+s+5} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{11}$$

Para este sistema tem-se $\omega_n = \sqrt{5}(\mathrm{rad}/s)$ e $\zeta \cong 0,224$. Ao se aplicar um degrau unitário obtém-se $M_p(\%) = 48,6\%$ e $t_s(2\%) \cong 8(s)$.

# Compensação por avanço de fase

**Exemplo 1:**

Deseja-se projetar um compensador $C(s)$ de modo que o coeficiente de amortecimento dos pólos de malha fechada dominantes seja $\zeta = 0,5$ $(M_p \cong 16\%)$ e o tempo de acomodação seja reduzido para $t_s(2\%) \cong 2(s)$.

# Compensação por avanço de fase

**Exemplo 1:**

Deseja-se projetar um compensador $C(s)$ de modo que o coeficiente de amortecimento dos pólos de malha fechada dominantes seja $\zeta = 0,5$ ($M_p \cong 16\%$) e o tempo de acomodação seja reduzido para $t_s(2\%) \cong 2(s)$. Para estas especificações de desempenho os pólos em malha fechada são:

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -2 \pm j2\sqrt{3} \qquad (12)$$

# Compensação por avanço de fase

Um ajuste no ganho não é o suficiente. Será necessário deslocar o lugar das raízes para esquerda.

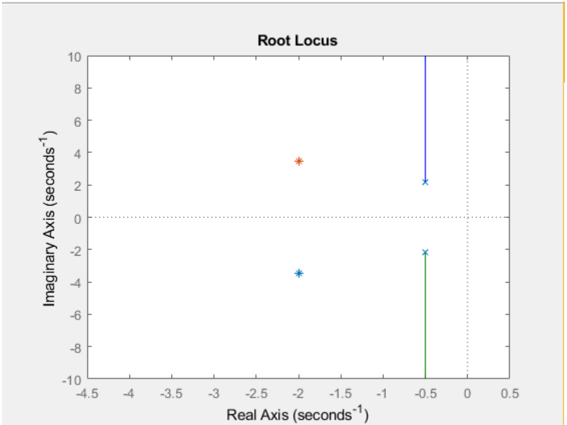


Figure: Exemplo 1: lugar das raízes sem compensador.

# Compensação por avanço de fase

## Projetando o compensador

$$G_c(s) = K_c \frac{s + z_c}{s + p_c} \tag{13}$$

em que $z_c < p_c$.

Adotandos-e o zero do compensador na mesma posição da parte real do pólo em malha fechada, pode-se utilizar a condição de ângulo para o cálculo do pólo do compensador:

$$\angle G(s)H(s) = 180^o, \tag{14}$$

# Compensação por avanço de fase

## Projetando o compensador

$$\angle G(s)H(s) = 180^o, \tag{15}$$

ou,

$$\frac{\angle s + z_c}{\angle s + p_c \angle s \angle s + 1} = 180^o \pm n360^o, \tag{16}$$

ou,

$$\angle s + z_c - \angle s + p_c - \angle s - \angle s + 1 = 180^o \pm n360^o, \tag{17}$$

ou,

$$\angle s + p_c = 180^o - \angle s - \angle s + 1 + \angle s + z_c, \tag{18}$$

ou,

$$\angle s + p_c = 180^o - \angle s - \angle s + 1 + \angle s + 2, \tag{19}$$

# Compensação por avanço de fase

## Projetando o compensador

Para $s = -2 + 2\sqrt{3}$, tem-se

$$\angle s + p_c = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{p_c - 2} = 180^o - 90^o - 106,1^o + 90^o = 43,9^o, \quad (20)$$

o que resulta em $p_c \cong 5,6$.

# Compensação por avanço de fase

## Cálculo do ganho pela condição de módulo

$$\left| \frac{K_c(s+2)}{s+5,6} \frac{5}{s(s+1)} \right| = 1, \tag{21}$$

ou,

$$k_c = \frac{|s+5,6||s||s+1|}{5|s+2|}, \tag{22}$$

para $s = -2 + 2\sqrt{3}$ resulta em $K_c \cong 4,16$, e:

$$C(s) = \frac{4,16(s+2)}{s+5,6}, \tag{23}$$

# Compensação por avanço de fase

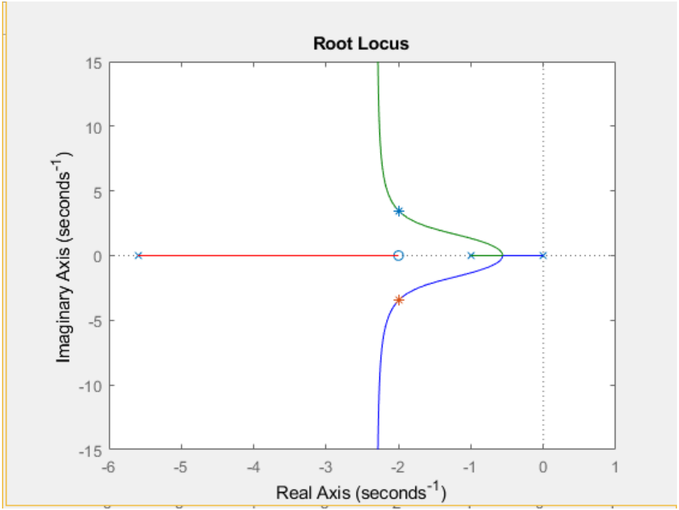


Figure: Exemplo 1: lugar das raízes com compensador.

# Compensação por avanço de fase

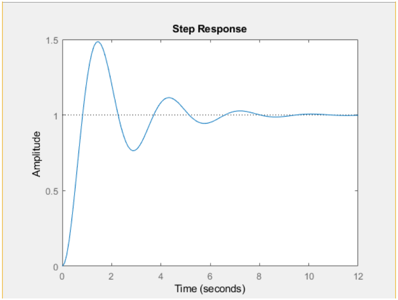


Figure: Exemplo 1: Resposta ao degrau sem compensador.

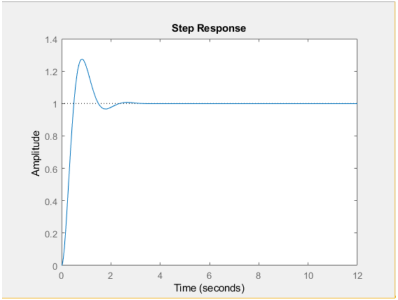


Figure: Exemplo 1: Resposta ao degrau com compensador.

# The End